臨界領域内でのRiemannゼータ関数の挙動と零点分布との関係について

名古屋大学・多元数理科学研究科 井上 翔太
Shōta Inoue
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

1 導入

Riemannゼータ関数は古くから素数との関わりがあることが知られており, 数論における重要な研究対象である. 素数との関係性はEuler, Riemannなどの偉大な数学者たちにより発見されたものである. より具体的に言及すると, 我々はRiemannの明示公式により, Riemannゼータ関数の零点分布と素数分布が鮮やかな関係性をもつことが明確にわかる. そのため, Riemann予想やLindelöf予想などの未だに謎に包まれている予想を始めとした問題たちを中心とした研究が今でも盛んに行われているのである. また, Riemann予想は零点分布と素数分布との関係のみではなくRiemannゼータ関数の解析的性質を調べる際にも重要な予想である. 実際に我々がRiemannゼータ関数を調べる方法はいろいろとあるわけだが, その基盤のほとんどは複素解析である. 特に, Hadamardの無限積表示はさまざまな場面で登場するRiemannゼータ関数を調べるための重要な道具となる. そしてこの公式は有理型関数を零点や極で表示するものであり, 複素関数の挙動はこれらの情報に本質的に支配されるわけである. この例として最も顕著であろう例として以下の定理が知られている.

定理 (Backlund in 1918-1919 [1])**.** 零点の密度関数 $N(\sigma, T, h)$ はRiemannゼータ関数の非自明な零点 $\rho = \beta + i\gamma$ で $\beta \geq \sigma$, $T \leq \gamma \leq T + h$ をみたすものの個数として定義する. このとき, Lindelöf予想が成り立つことと, 任意の正の数 ε に対して,

$$N(\sigma, T, 1) = o(\log T) \qquad (T \to +\infty)$$

が $\sigma \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$ で成り立つことは必要十分条件である.

ここでLindelöf予想とは, 任意の正の数 ε に対して

$$\log|\zeta(1/2 + it)| \leq \varepsilon \log t$$

が $t \geq T_0(\varepsilon)$ に対して成り立つという予想である. このLindelöf予想は純粋なRiemannゼータ関数の関数としての挙動に関する予想である. 一方で, 上記のBacklundの定理に

より, それは零点分布の問題として完全に書き換えることができるわけである. このようにゼータ関数の関数としての振る舞いを理解するために Riemann 予想などの問題が本質的に関わってくるわけである.

この講究録では Riemann ゼータ関数の振る舞いについて筆者の研究を述べることを目標として議論する. まず, 古典的な Riemann ゼータ関数の振る舞いについての結果として

$$\mathrm{Re}(\log\zeta(1/2+it)) = \log|\zeta(1/2+it)| \le C\log t,$$
$$\mathrm{Im}(\log\zeta(1/2+it)) =: |\pi S(t)| \le C\log t$$

が知られている. ただし, 上記の C はある正の絶対定数である. 前者の不等式については Euler-Maclaurin の和公式から直ちに導かれるごく古典的な結果である. 後者については多少複雑であり古くは Riemann の予想の一つでもあった不等式である. そしてのちに Hadamard が今では自身の名がついている Hadamard の無限積表示を用いて証明したものである. 前者の不等式については背景に Lindelöf 予想があり定数 C を小さく改善するというのは重要な研究である. この研究は最近に一つの進展があった. 実際に, フィールズ賞受賞者の Bourgan が

$$\log|\zeta(1/2+it)| \le (13/84+\varepsilon)\log t$$

という不等式を証明している [3]. また, Riemann ゼータ関数の対数の虚部で定義される $S(t)$ についても零点の正確な分布の情報を持っていることから重要な研究対象である. 実際に, 上記の後者の不等式も数年前に改善があった. 実際に Trudgian により,

$$|S(t)| \le (0.112+\varepsilon)\log t$$

が示されている [18].

一方で, Lindelöf 予想は Riemann ゼータ関数の対数の実部に関する予想であるが, この予想下で同関数の虚部である $S(t)$ の評価を鋭く改善することができる. 実際に Cramér により次の結果が証明されている.

定理 (Cramér in 1918 [7])**.** Lindelöf 予想を仮定する. このとき,

$$|S(t)| \le \varepsilon\log t$$

が $t \ge T_1(\varepsilon)$ で成り立つ.

このように, Lindelöf 予想を仮定することで著しい改善を得ることができるわけだが, より強い仮定となる Riemann 予想を仮定することでさらに深い結果を得ることができる. 実際に Littlewood が次の結果を得ている.

定理 (Littlewood in 1924 [12])**.** Riemann 予想を仮定する. このとき, $t \ge 5$ に対して

$$\log|\zeta(1/2+it)| \le \frac{C\log t}{\log\log t}, \qquad |S(t)| \le \frac{C\log t}{\log\log t} \tag{1}$$

が成り立つ.

この結果は臨界線上の Riemann ゼータ関数のオーダー評価を関数として改善するという著しい結果である．さらに近年においてもこれらの不等式に関係する研究は盛んに行われている．例えば上記の不等式に現れる定数 C に対する研究は近年活発に行われている．これは Goldston と Gonek の研究 [10] が発端となりその後, Carneiro, Chandee, Milinovich, Soudararajan [4], [5], [6], [17] らにより改善, 拡張されている．さらにこれらの関数は興味深い Ω 評価も得られている．これに関しては Bondarenko, Seip, Montgomery, Soundararajan, Tsang [2], [13], [16], [19] などが興味深い結果を残している．特に, Bondarenko, Seip [2] の結果は直近のこのテーマに関する一つのブレイクスルーで非常に興味深いものである．実際に, Montgomery, Selberg が昔に予想していた $\log|\zeta(1/2+it)|$, $S(t)$ に対する正確なオーダー評価に関する予想を完全に否定するものでもある．近年のこれらの関数の挙動についての正確な予想は以下の予想で Farmer, Gonek, Hughes により 2007 年に提起された．

予想 (Farmer, Gonek, and Hughes in 2007 [9])**.**

$$\max_{t\in[0,T]} \log|\zeta(1/2+it)| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + o(1)\right)\sqrt{(\log T)(\log\log T)},$$
$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{S(t)}{\sqrt{(\log t)(\log\log t)}} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}.$$

従って, この予想を背景として, 我々は Littlewood の評価 (1) を関数オーダーのレベルで改善することを目標としたいのである．しかし, それは現状難しい問題である．実際に Littlewood が評価 (1) を示したのは 1924 年で 100 年ほど前の話だが, 彼の評価を関数オーダーで改善するということは全くできていない．そこで筆者はその改善の手掛かりを探すべく次の問題を考えた．

問題 1. Riemann ゼータ関数の挙動と零点分布の関係をより明確な数学的主張で理解することができるか．

前述したように Backlund, Cramér, Littlewood らの研究により, Riemannz ゼータ関数の挙動と零点分布との漠然とした関係性は周知なわけである．しかし, 筆者はこれら古典的な結果や最近の研究を眺めている中で "関係性を明確にすることで Lindelöf 予想や Riemann 予想をより本質的に「武器」として使うことができる, 逆にそれを明確にしない状態では Riemann 予想などの条件を本質的に使うことはできない" という感覚も持っていた．このような理由から筆者は上記の問題を考えたわけである．

さて, この問題を正確に議論するために以下の定義を導入する．

定義 1 (Short Interval Zero Density Condition)**.** 関数 $l(t), v(t)$ を正値広義単調減少関数, 関数 $\Phi(t), \Psi(t)$ を正値広義単調増加関数とする．また, I を $\mathbb{R}_{>0}$ 上のある区間とする．このとき以下の主張 "任意の $T \in I$ に対して,

$$N(\sigma, T, l(T)) \le l(T)v(T)(\log T)\Phi(T)^{1/2-\sigma} \tag{2}$$

が $\sigma \ge \frac{1}{2} + \frac{1}{\Psi(T)}$ で成り立つ．" を "*the Short Interval Zero Density Condition of length l, volume v, density Φ, and domain Ψ on I*" と呼ぶ．また簡単のためこの主張を略して "SIZDC-(l, v, Φ, Ψ) on I" とも呼ぶ．さらに, 簡単のため $I = \mathbb{R}_{>0}$ の場合は "SIZDC-(l, v, Φ, Ψ)" と呼ぶ．

さて, この定義に対していくつかの注意を述べる. まず, この定義を導入した背景は "Lindelöf 予想や Riemann 予想の仮定をより本質的に使うため" ということもあり, 基本的にこれら二つの予想を一般化しているものである. そのため, これらより弱い予想である零点密度予想などは今回は興味の対象ではなく, この定義からは表現できないものである. 以下, この定義で表現できる既存の概念についての表現方法を紹介する. 今, const と書くと値が適当な定数関数とする.

まず, この定義は uncnditional な場合を "任意の Ψ に対して, SIZDC-$(\mathbf{1}, \mathrm{const}, \mathbf{1}, \Psi)$ が成り立つ" として表すことができる. ただし, $\mathbf{1}$ は恒等的に値を 1 とする定数関数を意味する. これは単純に任意の $\sigma \geq 1/2$ に対して,

$$N(\sigma, T, 1) \ll \log T$$

が成り立つという古典的な結果を書き換えただけのものである.

次にこの定義で Riemann 予想が表現できることを説明する. これも単純な書き換えとして SIZDC-$(l, \mathbf{0}, \Phi, \Psi)$ が任意の domain Ψ で成り立つことが Riemann 予想の主張となる. ただし, $\mathbf{0}$ は恒等的に 0 を値に持つ定数関数を意味する. この SIZDC の主張は実部が 1/2 と 1 の間の帯状領域内部内の任意の帯状領域内の零点の個数が 0 という主張なわけでそれは Riemann 予想の主張そのものである.

さらにこの定義で Lindelöf 予想を表現できることを説明する. これは Backlund の定理を書き換えることで実現できる. 実際に Lindelöf 予想は, 任意の有界な関数 Ψ に対して $v(t) = o(1)$ となる関数が存在し, SIZDC-$(\mathbf{1}, v, \mathrm{const}, \Psi)$ が成り立つという主張と必要十分である.

上記のようにこの定義は関数 l, v, Φ, Ψ をパラメータとすることで複合的な状況での議論を実現することができるものである.

2 記号の定義

この節では定理の主張を簡単にするためのいくつかの定義を行う. まず, s は複素数を表し, 以下 $s = \sigma + it$ で σ, t は実数とする. また, x, a は正の数で $x \geq 3$, $0 < a < 1$ とし, $\delta_x = (\log x)^{-1}$, $s_1 = \sigma_1 + it$ とする. ただし, $\sigma_1 = \frac{1}{2} + a + \delta_x$ である. そして $\Lambda(n)$ を von Mangoldt 関数とし, $\Lambda_x(n)$

$$\Lambda_x(n) = \begin{cases} \Lambda(n) & \text{if} \quad n \leq x, \\ \Lambda(n)\dfrac{\log(x^2/n)}{\log x} & \text{if} \quad x \leq n \leq x^2, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする. さらに,

$$A = \left\{ \beta + i\gamma \;\middle|\; \zeta(\beta + i\gamma) = 0, |t - \gamma| \leq \min\left\{ \frac{t}{2}, \frac{x^{3(\beta - \frac{1}{2})}}{\sqrt{\log x}} \right\} \right\}, \tag{3}$$

$$\sigma_A = \max\{\beta \mid |t-\gamma| \le 1,\ \text{or}\ \beta+i\gamma \in A\}, \tag{4}$$

$$L = \min\left\{\frac{t}{2}, \max\left\{\frac{x^{3(\beta-\frac{1}{2})}}{\sqrt{\log x}}\middle|\beta+i\gamma\in A\right\}\right\}, \tag{5}$$

$$\tau(a) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad a \le \sigma_A - 1/2, \\ 0 & \text{if} \quad a > \sigma_A - 1/2, \end{cases} \tag{6}$$

$$F_a(x,t) := \left(\frac{x}{\Phi(t/2)}\right)^a \times \sum_{k=0}^{[(\sigma_A-a-1/2)\log\Phi(t/2)]} \left(\frac{x^2}{\Phi(t/2)}\right)^{(k+1)/\log\Phi(t/2)}, \tag{7}$$

$$G_a(x,t) := \tau(a)(l(t/2)+\delta_x)v(t/2)(\log x)(\log t), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &Y_a(\sigma,x,t) := \\ &\frac{x^{1/2+a-\sigma}}{\log x}\left(\left|\sum_{n\le x^2}\frac{\Lambda_x(n)}{n^{s_1}}\right| + \log t\right) + G_a(x,t)\times\left\{x^{1/2-\sigma}\frac{F_a(x,t)}{\log x}+\right. \\ &\qquad \left. + \frac{x^{1/2-\sigma}}{\log x}\left(1+\frac{\Phi(t/2)^{-\delta_x}\log x}{\log\Phi(t/2)}\right)\left(\frac{x}{\Phi(t/2)}\right)^a + \frac{\Phi(t/2)^{1/2-\sigma+\delta_x}}{\log\Phi(t/2)}\right\}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} E_a(x,t) = &\left|\sum_{n\le x^2}\frac{\Lambda_x(n)}{n^{s_1}}\right| + \log t + G_a(x,t)\times \\ &\times\left(x^{-a}F_a(x,t) + \Phi(t/2)^{-a}\left(1+\frac{\log x}{\log\Phi(t/2)}\Phi(t/2)^{-\delta_x}\right)\right). \end{aligned} \tag{10}$$

とする.

3 結果

次の定理が主定理である.

定理 1. SIZDC-(l,v,Φ,Ψ) on $[t-L,t+L]$ を仮定する. ただし, L は (5) で定義される正の実数である. また, 実数 $t\ge 14$ を $\zeta(s)$ の零点の虚部とは一致しないものとして取り, x を $3\le x\le \min\left\{e^{\Psi(t/2)},t^2\right\}$ の範囲に属する実数とする. さらに, $\delta_x=(\log x)^{-1}$ と置き, $s_x=\sigma_x+it$ で $\sigma_x=\frac{1}{2}+2\delta_x$ であるものとする. このとき, $\sigma_x\le\sigma\le 2$, に対して

$$\log\zeta(s) = \sum_{|s-\rho|\le\delta_x}\log\left|\frac{s-\rho}{\delta_x+i(t-\gamma)}\right| + \sum_{2\le n\le x^2}\frac{\Lambda_x(n)}{n^s\log n} + O\left(Y_{\delta_x}(\sigma,x,t)\right),$$

が成り立つ．また，$\frac{1}{2} \le \sigma \le \sigma_x$，に関して

$$\log\zeta(s) = \sum_{|t-\gamma|\le 2\delta_x} \log\left|\frac{s-\rho}{s_x-\rho}\right| + \sum_{|s_x-\rho|\le\delta_x} \log\left|\frac{s_x-\rho}{\delta_x+i(t-\gamma)}\right| \\ + \sum_{2\le n\le x^2} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{s_x}\log n} + O\left(\delta_x E_{\delta_x}(x,t)\right), \tag{11}$$

が成り立つ．

この定理は一見複雑な定理であるが，パラメータ l, v, Φ, Ψ たちが $\log\zeta(s)$ の挙動にどの程度影響するかを Selberg の方法を用いて正確に計算したものであり，いくつかの重要な応用を含んでいる定理でもある．実際に，前述した Cramér, Littlewood の結果はこの定理から簡単な計算のみで得ることができる．さらに Selberg の公式 [14] もこの定理から簡単な計算で導くことが可能である．一方で筆者の最終目標は Littlewood の評価の改良であり，それの手掛かりを発見することが重要なこの研究の動機である．そして，筆者はその手掛かりの一つとして Littlewood の評価の仮定である Riemann 予想をより弱い主張の仮定に書き換えることにこの定理を用いることで成功した．それが以下の系である．以下の系は $x = \left(\log\frac{t}{2}\right)^{\varepsilon_0/4}$ とすることで上記の定理から瞬時に従う．

系 2. 任意に小さな正の数 ε_0 を取る．そして，SIZDC-($\frac{1}{\log\log t}$, const, $(\log t)^{\varepsilon_0}$, $\varepsilon_0\log\log t$) を仮定する，このとき，

$$\log\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = \sum_{|\frac{1}{2}+it-\rho|\le\frac{2}{\log\log t}} \log\left|\frac{\frac{1}{2}+it-\rho}{\frac{1}{2}+\frac{8}{\varepsilon_0\log\log t}+it-\rho}\right| + O_{\varepsilon_0}\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right)$$

が成り立つ．特に，

$$\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| \le \frac{C\log t}{\log\log t}, \quad S(t) \ll_{\varepsilon_0} \frac{\log t}{\log\log t},$$

が成り立つ．ただし，C は ε_0 のみに依存するある定数である．

この系により Littlewood の評価の仮定に Riemann 予想ほどの強い仮定が必要でないことがわかるであろう．実際にこの系の SIZDC の言葉による仮定をわかりやすく零点密度関数で書き直してみると以下のものになる: 任意の固定された正の数 ε_0 に対して，評価

$$N\left(\sigma, t, \frac{1}{\log\log t}\right) \ll (\log\log t)^{-1}(\log t)^{1-\varepsilon_0(\sigma-1/2)} \tag{12}$$

が $\sigma \ge \frac{1}{2}+\frac{1}{\varepsilon_0\log\log t}$ で成り立つ．この仮定は例えばよく知られた零点密度定理によると平均的にはかなり尤もらしい仮定であり，Riemann 予想と比較して非常に緩い仮定となっている．

この講究録では証明のアイディアを少しだけ述べることにする．今回得られた結果は基本的に Selberg の Riemann 予想下，及び unconditional な場合の仕事 [14], [15] で用いられた手法を用いて得られるものである．Selberg の手法の根本的なアイディアは「非自明な零点を Dirichlet 多項式に書き換える」という鮮やかなものである．しかし，その方法のみでは系 2 のような結果を得ることはできない．そこで今回は Selberg の手法からでは取り除けない零点たちを細かく一定の区間内の零点たちに分類してそれらの寄与を正確に計算するということを行った．その他の詳しい証明は [11] を参照して頂きたい．

4　今後の展望

今回の研究では Riemann 予想をこの短区間中での零点の個数の仮定に書き換えても Littlewood の評価は得ることができることを示したものとなる.

一方でここで得られた仮定が最良のものかどうかはまだわかっていない. もちろん, ここで得られた Littlewood の評価の証明のための仮定 (12) は筆者が可能な限り弱くすることを試みたものであり, 現状この過程を改善するアイディアを筆者は持っていない. ここで一つの改善の方針例としては仮定の length l を有界な関数にまで弱めることはできないか, という問題がある. 現状得られている仮定での length l は $(\log\log t)^{-1}$ というかなり小さな関数となっており, これは一見, 強い仮定である. 実際に, 筆者はこの問題を Yoonbok 氏に指摘されている. しかし, 筆者がこの短い length l を選んでいることにはいくつか理由がありそれは難しい問題であると考える. それを述べるために筆者のこれまでのいくつかの試みをここに記述する. まず, 筆者がこの研究のための多量の計算の中で最初に Littlewood の評価を得るために必要な仮定は次であった.

$$N(\sigma, t, 1) \ll (\log\log t)^{-1}(\log t)^{1-\varepsilon_0(\sigma-1/2)}, \qquad \sigma \geq \frac{1}{2} + \frac{C}{\log\log t}. \tag{13}$$

ここで $(\log\log t)^{-1}$ という “自然でない” ものが現れた. 一方で筆者の私感としてこの不自然な $(\log\log t)^{-1}$ は Littlewood の評価を示すためには取り除くことができない量であるとも考えた. この理由は Littlewood の $S(t)$ に対しての評価から依るものである. 我々は Riemann-von Mangoldt の公式から $S(t) \ll \frac{\log t}{\log\log t}$ という評価により長さ $(\log\log t)^{-1}$ の短区間中の零点の分布を詳細に理解することができる. そして, 今回の目標の一つがこの $S(t)$ の評価であることから, 「臨海線近くの零点分布に対して同等の短区間中での零点分布の仮定が必要不可欠になる」という結論が筆者の中で出たわけである. しかし, 仮定 (13) のままでは左辺とは一見関係の無い $(\log\log t)^{-1}$ が右辺に現れることからやはり不自然であり, 「より自然で弱い仮定を設定できないか」という問題が残ったのである. そして筆者が更なる改良を自身で出したのが今回の仮定 (12) となるわけである. よって, この length l の選び方は Littlewod の評価を得るための仮定としては最良のものであると筆者は考える.

ここでまでで, 筆者は length l について言及した. また, volume v は定数関数として選んでいるのでこれは SIZDC の言葉からは最善のものである. 一方で, その他の density Φ, domain Ψ の選び方は最良であるか, という問題は筆者の中でも結論は出ていない. しかし, この問題を議論するためのアイディアはいくつかある. その一つを述べてこの講究録を締めくくりたい. まず, Backlund の定理により, $\log|\zeta(1/2+it)|$ の上からの評価を用いることで, 我々は臨界領域内の零点の分布に対する情報を得ることができる. そこで我々の目標である Littlewood の評価 $\log|\zeta(1/2+it)| \leq \frac{C\log t}{\log\log t}$ を用いることで我々は臨界領域内の零点の個数を評価できる. そして, その評価から density Φ と domain Ψ の仮定として最善な候補は見つかるであろう.

5 謝辞

この講究録は 2018 年度 RIMS 研究集会で筆者が発表した内容に基づくものである．その発表を快く受け入れて頂いた研究集会代表者である見正秀彦先生, そして副代表者である鈴木正俊先生にこの場を借りて深くお礼申し上げます．

参考文献

[1] R. J. Backlund, Über die Beziehung zwischen Anwachsen und Nullstellen der Zetafunktion, *Öfversigt Finska Vetensk. Soc.* **61** (1918-1919), no. 9.

[2] A. Bondarenko and K. Seip, Extreme values of the Riemann zeta function and its argument, *Math. Ann.* **372** (2018), 999–1015.

[3] J. Bourgain, Decoupling, exponential sums and the Riemann zeta-function, *J. Amer. Math. Soc.* **30** (2017), 205–224.

[4] E. Carneiro, V. Chandee, and M. B. Milinovich, Bounding $S(t)$ and $S_1(t)$ on the Riemann Hypothesis, *Math. Ann.* **356** (2013), 939–968.

[5] E. Carneiro, V. Chandee, and M. B. Milinovich, A note on zeros of zeta and L-functions, *Math. Z.* **281** (2015), 315–332.

[6] V. Chandee and K. Soundararajan, Bounding $\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$ on the Riemann hypothesis, *Bull. London Math. Soc.* **43** (2011) 243–250.

[7] H. Cramér, Über die Nulistellen der Zetafunktion, *Math. Z.* **2** (1918), no. 3-4, 237–241.

[8] H. Davenport, *Multiplicative number theory.* Third edition. Revised and with a preface by Hugh L. Montgomery, Graduate Texts in Mathematics, 74. Springer-Verlag, New York, 2000.

[9] D. W. Farmer, S. M. Gonek, and C. P. Hughes, The maximum size of L-functions, *J. Reine Angew. Math.* **609** (2007), 215–236.

[10] D. A. Goldston and S. M. Gonek, A note on $S(t)$ and the zeros of the Riemann zeta-function, *Bull. London Math. Soc.* **39** (2007) 482–486.

[11] S. Inoue, On the behavior of the logarithmic of the Riemann zeta-function, (2019) `arXiv: 1902.02956`.

[12] J. E. Littlewood, On the zeros of the Riemann zeta-function, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **22** (1924), 295–318.

[13] H. L. Montgomery, Extreme values of the Riemann zeta function, *Comment. Math. Helvetici* **52** (1977), 511–518.

[14] A. Selberg, On the remainder formula for $N(T)$, the Number of Zeros of $\zeta(s)$ in the Strip $0 < t < T$. Avhandl. Norske Vid.-Akad. Olso I. Mat.-Naturv. Kl., no.1; Collected Papers, Vol. 1, New York: Springer Verlag. 1989, 179–203.

[15] A. Selberg, Contributions to the theory of the Riemann zeta-function, Avhandl. Norske Vid.-Akad. Olso I. Mat.-Naturv. Kl., no.1; Collected Papers, Vol. 1, New York: Springer Verlag. 1989, 214–280.

[16] K. Soundararajan, Extreme values of zeta and L-functions, *Math. Ann.* **342** (2008), 467–486.

[17] K. Soundararajan, Moments of the Riemann zeta-function, *Ann. of Math.* **170** (2009), 981–993.

[18] T. S. Trudgian, An improved upper bound for the argument of the Riemann zeta-function on the critical line II, *J. Number Theory* **134** (2014), 280–292.

[19] K.-M. Tsang, Some Ω-theorems for the Riemann zeta-function, *Acta Arith.* **46** (1986), 369–395.